

ASSEGNAIMENTO 2: ATTRAZIONE FRA PIÙ CORPI - ALGORITMO DI BARNES-HUT

Informatica, Corso di Laurea in Fisica, Università di Pisa

AA 2017/18

Nel 1687, nel suo famoso Principia, Sir Isaac Newton formulò il principio che governa il movimento di due corpi sotto l'influenza della loro mutua attrazione gravitazionale. La legge di gravitazione universale di Newton asserisce che la forza gravitazionale tra due corpi è data dal prodotto delle loro masse diviso il quadrato della distanza tra di loro, scalata rispetto la costante di gravitazione universale G , che è $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Quando i corpi sono più di due, per calcolare la forza che agisce su un singolo corpo, applichiamo il principio di sovrapposizione, per cui la forza che agisce su un singolo corpo a in una direzione è la somma delle singole forze che agiscono su a in quella direzione.

In altre parole, dato un insieme di corpi A con $|A| = n$, per calcolare la forza $F(a)$ che agisce su un singolo corpo a da parte di tutti gli altri in $A \setminus \{a\}$, sono richieste $n - 1$ applicazioni della legge di gravitazione universale, una per ogni coppia a, b , con $b \in A \setminus \{a\}$. Dunque calcolare la forza $F(a)$ per ogni $a \in A$ richiede $n \cdot (n - 1)$ valutazioni, ovvero $O(n^2)$ tempo. Quando il numero di corpi coinvolti nelle nostre valutazioni è grande, il tempo richiesto per tale calcolo è troppo elevato e per questo motivo molti scienziati usano l'algoritmo di Barnes-Hut per approssimare $F(a)$ e simulare l'attrazione di n corpi.

1 L'algoritmo di Barnes-Hut

L'idea principale dell'algoritmo è quella di raggruppare i corpi vicini tra di loro e approssimarli come singoli corpi. Se il gruppo è sufficientemente lontano da un corpo a , possiamo approssimare i suoi effetti gravitazionali su a usando un centro di massa. Il centro di massa di un gruppo di corpi è la media delle posizioni dei suoi corpi, ciascuno pesato con la sua massa. Più formalmente, se due corpi a, b hanno posizioni rispettivamente x_a, y_a e x_b, y_b e masse m_a e m_b , la loro massa totale m e il centro di massa x, y sono:

$$m = m_a + m_b, \quad x = \frac{x_a m_a + x_b m_b}{m}, \quad y = \frac{y_a m_a + y_b m_b}{m}.$$

L'algoritmo di Barnes-Hut permette di raggruppare insieme i corpi che sono sufficientemente vicini. L'idea è quella di dividere l'insieme dei corpi in gruppi memorizzandoli in un *quad-tree*. Un *quad-tree* è simile a un albero binario, eccetto che ogni nodo interno ha 4 figli invece di 2 (alcuni di questi potrebbero essere vuoti). Ogni nodo del *quad-tree* rappresenta una regione dello spazio bidimensionale e questa viene rappresentata salvando dentro al nodo la massa totale dei corpi nei suoi sottoalberi e il centro di massa complessivo. Il nodo radice rappresenta tutto il piano e i suoi quattro figli rappresentano i quattro quadranti dello spazio. Per ciascuno dei quattro quadranti, l'idea è ripetuta ricorsivamente finché ciascuna suddivisione contiene un solo o nessun corpo (in una regione che non contiene corpi, le sue sottoregioni non contengono corpi e quindi non vengono rappresentate nel *quad-tree*). Dunque tutti i nodi dell'albero hanno un numero di figli ≤ 4 . Ogni foglia dell'albero rappresenta un singolo corpo e contiene la massa e la posizione di tale corpo. Ogni nodo interno rappresenta il gruppo di corpi che contiene (e che sono nel suo sottoalbero) e memorizza il centro di massa di tutti i suoi corpi figli. Come esempio di consideri la Figura 1.

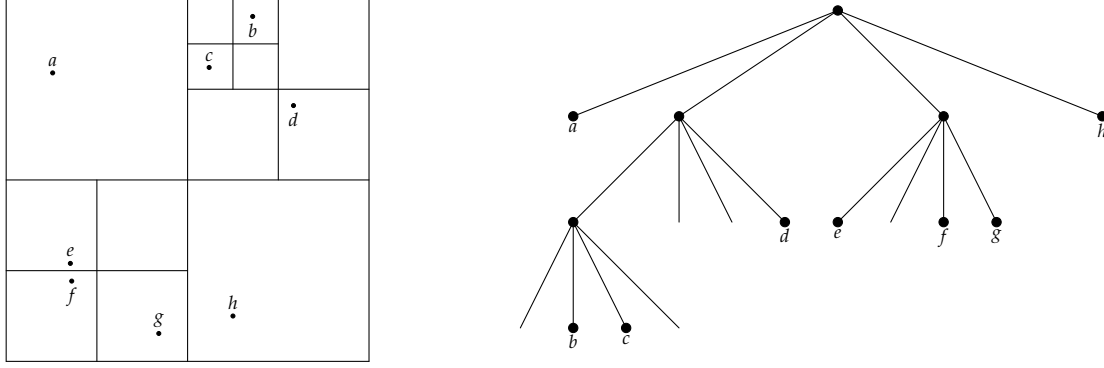


Figure 1: Corpi collocati in un piano e corrispondente quad-tree.

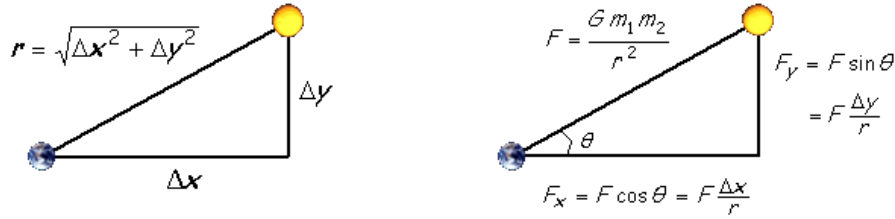


Figure 2: Calcolo della forza

Calcolo di $F(a)$. Per calcolare $F(a)$ fra una coppia di corpi a e b possiamo utilizzare la formula

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

dove $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$, e m_1, m_2 sono le masse di a e b rispettivamente. Come mostrato in Fig. 2 l'attrazione fra i due corpi si effettua lungo la linea che li congiunge, tuttavia si può suddividere la forza nella sue componenti lungo i due assi F_x ed F_y .

Il principio di sovrapposizione, ci dice che la forza complessiva che agisce su un corpo lungo le direzioni x e y in presenza di più corpi può essere calcolato come la somma delle forze esercitate dalle singole particelle nelle due direzioni.

Nell'algoritmo di Barnes-Hut si approssima $F(a)$ su un dato corpo a , evitando di considerare ogni singolo nodo in $A \setminus \{a\}$. L'idea è di considerare gruppi di corpi come un singolo corpo. In particolare, se il centro di massa di un gruppo di corpi B è sufficientemente lontano da a allora approssimiamo B come un singolo corpo, la cui posizione è il centro di massa di B e la cui massa è la somma delle masse in B .

Dunque, fissata una tolleranza θ , per calcolare $F(a)$ dobbiamo attraversare i nodi dell'albero partendo dalla radice dell'albero. Se stiamo visitando il nodo che corrisponde a una regione di lato s che contiene il gruppo di corpi B , dobbiamo confrontare la distanza d di a rispetto al centro di massa di B :

- se s/d è minore di θ , allora a è sufficientemente lontano dai corpi in B : possiamo considerare tutti i corpi di B come uno singolo e possiamo evitare di processare il sottoalbero radicato in B ;
- altrimenti, dobbiamo considerare i figli di B e continuare il processo di visita nei sottoalberi.

Un valore comunemente usato nella pratica per θ è 0.5. Si noti che se $\theta = 0$, allora nessun nodo interno è trattato come un singolo corpo e l'algoritmo degenera nell'algoritmo esaustivo.

È importante notare la seguente proprietà per un nodo interno B , che consente di calcolare la sua dimensione s : la dimensione della regione corrispondente a un nodo interno B avente distanza dalla radice

h è pari a $s^*/(2h)$, dove s^* è il lato dell'area totale. In altre parole quando visitiamo un figlio B' di B , la dimensione di B' rispetto a quella di B è dimezzata.

Costruzione dell'albero di Barnes-Hut. L'albero può essere costruito ricorsivamente come segue. Possiamo assumere che le posizioni dei corpi siano tutte distinte. Per inserire un corpo a nell'albero radicato nel nodo B , usiamo la seguente regola:

- Se il nodo B non contiene alcun corpo, dobbiamo inserire a in B .
- Se il nodo B è un nodo interno:
 - Aggiorniamo il centro di massa e la massa totale di B per includere anche a .
 - Inseriamo ricorsivamente il corpo a nel quadrante appropriato.
- Se il nodo B è una foglia che contiene un solo corpo b , la regione adesso contiene due corpi ed è necessario suddividerla. In particolare, sarà necessario suddividere la regione, creando quattro figli di B , e inserire b e a nei quadranti appropriati, aggiornando il centro di massa e la massa totale.

Nota: Dal momento che a e b dopo la suddivisione potrebbero rimanere nello stesso quadrante (perché ad esempio sono molto vicini), potrebbero essere necessarie diverse suddivisioni durante un singolo inserimento.

2 L'assegnamento

L'assegnamento prevede la realizzazione delle seguenti funzioni principali

1. Costruire l'albero di Barnes-Hut, implementando una funzione che dato un albero e un corpo a , modifica l'albero aggiungendo a (restituendo il puntatore all'albero così modificato).
2. Scrivere una funzione che date le coordinate x, y di un corpo restituisca la sua massa.
3. Scrivere una funzione che dato un albero, una particella a e una tolleranza θ , stima $F(a)$.

Inoltre nel file `barnes.h` sono definite alcune funzioni ausiliarie per la gestione del quad-tree che devono essere anch'esse realizzate.

Ricorsione e Complessità. Le funzioni 1 e 2 possono essere realizzate in un tempo che è lineare con l'altezza dell'albero, mentre la funzione 3 può essere realizzata in un tempo lineare con il numero dei nodi dell'albero. Si consiglia inoltre di utilizzare la ricorsione ove possibile.

3 Definizione delle Funzioni Principali

Le seguente struttura (definita in `barnes.h`) definisce il quad-tree

```
typedef struct nodo {
    double massa;
    double x;
    double y;
    struct node *NE;
    struct node *NW;
    struct node *SE;
    struct node *SW;
} nodo_t;
```

La definizione delle tre principali funzioni è la seguente:

1. Inserimento di un corpo con massa m , e coordinate x, y in un albero radicato nel nodo $root$.

```
node_t* inserisci(double m, double x, double y, node_t *root)
```

Notate che aggiungere un corpo significa anche aggiornare tutti i centri di massa dei suoi predecessori nel cammino che collega il nodo alla radice.

2. Ricerca nell'albero della massa di un corpo di coordinate date.

```
double massadi(double x, double y, node_t *root)
```

3. Stima di $F(a) = (F_x(a), F_y(a))$ per un corpo a date le sue coordinate x, y , la tolleranza θ e l'albero. Chiaramente l'albero contiene a e si usi la funzione al punto 2 per ottenere la massa di a . fx ed fy sono i puntatori alle due variabili che conterranno la componente della forza sull'asse x e sull'asse y rispettivamente:

```
void stima_forza(double x, double y, double* fx, double* fy, double theta, node_t  
                *root)
```